$\forall x \in E$, $p(x)$: x lit pour tout "x et E" ou pour n'importe quelle x et E $P(x)$ est vrai

Exple : $\forall x \in E\ [1;+\infty[\ ;\ x^2 > 1$ vrai

$\forall x \in \mathbb{R}\quad x^2 \geq 1$ fausse car $\begin{cases} P(x)\ 0 \in \mathbb{R} \\ \text{mais } 0^2 = 0 < 1 \end{cases}$

2. Quantificateurs essentiels $\exists$

L'assertion $\exists\, x \in E$, $p(x)$ est vrai lorsqu'on peut trou[ver] au moins un x dans E pour lequel $p(x)$ est vraie

l'assertion $\exists\, x \in E$ se lit

Il existe au moins un x dans E tq $P(x)$

on peut trouver au moins

Ex : $\exists\, x \in \mathbb{R}\quad x(x-2) < 0$ vraie par exple $x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$; $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$

$\exists\, x \in \mathbb{R}$; $x^2 = -1$ Faux

$\exists\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 1$ Vrai

$x = i \in \mathbb{C}$.

Document (Exo)

-> ~~Anale~~ Annales pdf.

-> logique & Exo & corrigés 11.

Correction de TD.

Exo 3

1- Faux on a $P \Rightarrow Q$ $\neg(P \Rightarrow Q) = P \Rightarrow \neg Q$ $x+y$ et $a+b$ et $x+a = y+b$.

2- Vrai

3- Faux $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tq $x > y$.

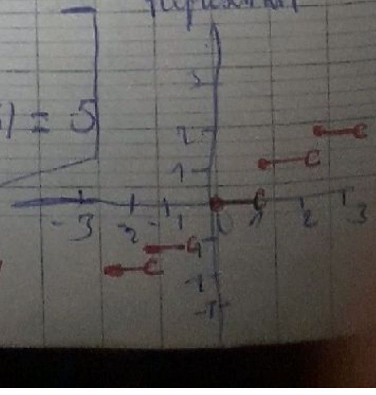
4- Vrai

5. $E(3,5) = 3$. $E(-3,5) = -4$, $E(-3,5) = -4$, $E(5) = 5$

La partie entière est le plus ~~petit~~ grand entier relatif inf ou égal à x.

Ex ; $E(x) \in \mathbb{Z}$. $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Représentant



Pt escalier

Mq $E(x+n) = E(x)+n$

$E(x) \leq x < E(x)+1$

$E(x)+n \leq x+n < E(x)+n+1$

$x+n$ est encadré par 2 entiers relatifs consécutifs.

Dc $E(x+n) = E(x)+n$.

6. Faux $n \neq m \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

$n \leq a \leq m$

7. Vrai

8. $\max(x;y) \geq x$ et y: Vrai. $\min(x;y) \geq x$ et y n'est pas vrai

Négation $\min(x;y) < x$ ou y

9. Vrai

10- Faux Négat° $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} / y \leq x^2$

11. Faux $\exists (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, x^2+y^2 \neq z^2$

Exercice 05

1. Démontration par récurrence

Mq $2^{n-1} \leq n!$

$\underline{n=1}$ $2^{n-1} = 2^0 = 1 \leq 1 = 1!$

Mq $2^n \leq (n+1)!$

$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n! \leq (n+1) n! \leq (n+1)!$

car $n+1 \geq 2$

2)

$2^4 \equiv 1 [15]$

$445 = 4 \times 111 + 1$

$(2^4)^{111} \equiv 1^{111} [15]$

$a \equiv b [n] \Rightarrow a^k \equiv b^k [n]$

$2^{445} \equiv 1 [15]$

$2^{445} \equiv 2 [15]$

$7 \equiv 7 [15]$

$2^{445}+7 \equiv 9 [15]$

$15 / (2^{445}+7) - 9$

$(2^{445}+7) - 9 = 15k$

$\underbrace{(2^{445}+7)}_{a} = \underbrace{15k}_{b} + \underbrace{9}_{r}$

$pgcd(a, b) = pgcd(b, r)$

$pgcd(2^{445}+7, 15) = \quad " \quad (15, 9) = 3$

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculons le pgcd entre n^2+n et $2n+1$

$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$

$= 4(n^2+n)+1$

$(2n+1)(2n+1) - 4(n^2+n) = 1$

$u \cdot 4 + bv = 1$

Bezout

$\Rightarrow pgcd(2n+1, n^2+n) = 1$

4) Montrons que $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admet pas de solution entière

Supposons que $n \in \mathbb{Z}$ est solution

$9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$

$9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0$

$\Rightarrow n(9n^4 - 12n^3 + 6) - 5 = 0$

$n(9n^4 - 12n^3 + 6) = 5$

$n | 5 \Rightarrow n \in \{-5, -1, 1, 5\}$

Vérification

$n = 1$

$9 - 12 + 6 - 5 = -2 \neq 0$

1, n'est pas solution

$n = -1$

$-9-12-6-5 \neq 0$

-1 n'est pas solution

5 et -5 ne st pas solution

$S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$

5/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'1 entier

. Suppo q n est le carré d'1 entier et q $2n$ est le carré d'1 ent

ie $\begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^*, n = k^2 \\ \exists l \in \mathbb{N}^*, 2n = l^2 \end{cases}$

$\Rightarrow l^2 = 2n = 2k^2$

$2k^2 - l^2 = 0$

$(\sqrt{2}k - l)(\sqrt{2}k + l) = 0$

$\begin{cases} \sqrt{2} = \frac{l}{k} \\ \text{ou} \\ \sqrt{2} = -\frac{l}{k} \end{cases}$

ie. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

absurde car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

6. Supposons que un de P_i divise $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n + 1$

Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq

$P_1 \times P_2 \times \cdots P_i + 1 = p_i \cdot k$

$-P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r + p_i \cdot k = 1$

$P_i(-P_1 \times \cdots \times P_{i-1} \times P_{i+1} \times \cdots P_n + k) = 1$

$P_1 \times \cdots \times P_r = P_1 \times \cdots \times P_{i-1} \times P_i \times P_{i+1} \times \cdots \times P_r$

P_i divise $1 \Rightarrow P_i = 1$ impossible car 1 n'est pas premier

Donc aucun de P_i ne divise $P_1 \times P_2$

Supposons qu'il y ait un nbre fini de nbre 1er

$P_1, \cdots, P_r$

D'après la quest° precedente aucun des p_i ne divise $(\prod_{i=1}^{k} P_i) + 1$

Dc $(\prod_{i=1}^{k} P_i) + 1$ est un premier distincts de $P_1, \cdots, P_r$

7/ a et $b \in \mathbb{Q}$ tq $a+b$ et $a \times b \in \mathbb{Z}$

Mq $a, b \in \mathbb{Z}$.

$a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$a = \frac{p}{q}$, $p \wedge q = 1$

$b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists t, r \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq

$b = \frac{t}{r}$, $t \wedge r = 1$

. $a+b = \frac{p}{q} + \frac{t}{r}$

$\begin{cases} a+b = \frac{pr+tq}{qr} \\ a \times b = \frac{pt}{qr} \end{cases}$

Comme $a+b$ et $a \times b \in \mathbb{Z}$ alors $\exists l, k \in \mathbb{Z}$ tq $\begin{cases} a+b = \frac{pr+tq}{qr} = l \\ a \times b = \frac{pt}{qr} = k \end{cases}$

$\begin{cases} pr + tq = lqr \\ pt = kqr \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pr = lqr - tq \\ pt = kqr \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} pr = q(lr - t) \\ pt = qkr \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q / pr \\ r / pt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q / r \text{ car } p \wedge q = 1 \\ r / p \text{ car } r \wedge p = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} q|r \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z},\ r = qa \\ r|p \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z},\ p = rb \end{cases}$$

$\Rightarrow p = qab$ car $r = qa$

$\Rightarrow q|p \Rightarrow \underline{a \in \mathbb{Z}}$

$pt = qkr \Rightarrow q|pt$

$q \wedge p = 1 \Rightarrow q|t$

$\Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z}\ t = \ell q$

$tq = \ell qr - pr$

$tq = r(\ell q - p)$

$\Rightarrow r|tq$

$\Rightarrow r|q$ car $r \wedge t = 1$

$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z},\ q = dr$

$\Rightarrow t = \ell dr$

$\Rightarrow r|t$ donc $\underline{b \in \mathbb{Z}}$

Exercice 07

1/ Montrons le théorème logique suivant

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P$ ou Q

$((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$

$\Leftrightarrow \overline{(P \text{ ou } Q)}$ ou R

$\Leftrightarrow (\neg P$ et $\neg Q)$ ou R

$\Leftrightarrow (\neg P$ ou $R)$ et $(\neg Q$ ou $R)$

$\Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$

2.

Preuve par l'absurde

Supposons que $nm = 1$

et $\begin{cases} n \neq 1 \\ \text{ou} \\ m \neq 1 \end{cases}$

. $n \neq 1 \Rightarrow n > 1$

$\Rightarrow n \geq 2$

$\Rightarrow nm \geq 2m$

$\Rightarrow 1 \geq 2m$ ce qui est impossible

. $m \neq 1$ même démarche que précédemment.

3. $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Preuve par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{n^2+1}$ est un entier

$\exists m \in \mathbb{N},\ \sqrt{n^2+1} = m$

$n^2 + 1 = m^2$

$m^2 - n^2 = 1$

$(m-n)(m+n) = 1$

$m - n$ et $m + n$ ont

$\begin{cases} m+n = 1 \text{ et } m-n = 1 \\ \text{ou} \\ m+n = -1 \text{ et } m-n = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2m = 2 \Rightarrow m = 1 \\ 2m = -2 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$

Absurde car $m \in \mathbb{N}$

$\underline{m = 1}$ $\quad n^2 + 1 = 1$

$n^2 = 0$

$n = 0$ absurde car $n \in \mathbb{N}^*$

4 $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Par récurrence

Pr $n = 0$

$2^0 > 0$

$1 > 0$

la propriété est vraie au rang $n = 0$

Supposons qu'elle est vraie au rang n

et mtrons qu'elle aussi vraie au rang n+1.

$2^n > n$

$2^{n+1} > n+1$

$2^{n+1} = 2^n \times 2$

$= 2^n + 2^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $2^n > 1$

or par hypothèse on a $2^n > n$

$2^n > 1$ et $2^n > n$

$\Rightarrow 2^n + 2^n > n+1$

or $2^{n+1} > n+1$ car la supériorité est compatible avec l'addition dc la propriété est vraie au rang n+1

cc $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Exercice 08.

1) $\frac{13}{n+2} \in \mathbb{Z}$

$\frac{13}{n+2} = k ; k \in \mathbb{Z}$

$13 = k(n+2)$

$k / 13$ dc $k = \{-13, -1, 1, 13\}$

$k = -1 \Rightarrow \frac{13}{n+2} = -1$

$\Rightarrow 13 = -n-2$

$\Rightarrow -n = 13+2 \Rightarrow n = -13$

$k = -13 \Rightarrow \frac{13}{n+2} = -13$

$\Rightarrow -13(n+2) = 13$

$\Rightarrow n+2 = -1$

$n = -3$

$k = 1 \Rightarrow \frac{13}{n+2} = 1$

$n+2 = 13$

$n = 11$

$k = 13 \Rightarrow \frac{13}{n+2} = 13$

$13(n+2) = 13$

$n+2 = 1$

$n = -1$

$S = \{-15, -3, 11, -1\}$

b $n+4$ divise $2n^2-n-8$.

$n \in \mathbb{Z}$

$n+4 / 2n^2-n-8$

$$\begin{array}{l|l} 2n^2-n-8 & n+4 \\ \hline -(2n^2+8n) & 2n-9 \\ 0-9n-8 & \\ -(-9n-36) & \\ 0+28 & \end{array}$$

d'où $\frac{2n^2-n-8}{n+4} = \frac{(n+4)(2n-9)+28}{n+4}$

$= 2n-9 + \frac{28}{n+4}$

or $2n-9 \in \mathbb{Z}$.

$2n^2-n-8 = (n+4)(2n-9)+28$ dc

$n+4 | 2n^2-n-8 \Rightarrow n+4 | 28$.

$\Rightarrow n+4 \in D(28)$

or $D(28) = \{-28, -14, -7, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

dc $n \in \{-32, -18, -11, -8, -6, -5, -3, -2, 0, 3, 10, 24\}$

2. Montrons par recurrence puis en utilisant les congruences que $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{2n}+3$ divisible par 4

* Par recurrence

Soit (P_n) la proposition $4 \mid 5^{2n}+3$

pr $n=0$ $5^0+3 = 1+3 = 4$

$4 \mid 4$ dc (P_0) est vraie

Supposons que (P_n) est vraie au rang $n \geq n_0$ et vérifions au rang $n+1$.

Posons $u_n = 5^{2n}+3$

$u_{n+1} = 5^{2(n+1)}+3$
$= 5^{2n} \times 5^2 + 3$
$= 5^2(5^{2n}+3) - 72$
$= 5^2(u_n) - 72$

or $4 \mid u_n$ et $4 \mid -72$ dc $4 \mid u_{n+1}$ dc (P_n) est vraie au rang $n+1$

En cc $4 \mid 5^{2n}+3$.

* Par Congruence

$5 \equiv 1 [4]$

$5^{2n} \equiv 1 [4]$

$3 \equiv -1 [4]$

$5^{2n}+3 \equiv 0 [4] \Leftrightarrow 4 \mid (5^{2n}+3)$.

3-a

a^2+b^2 impair $\Rightarrow$ a et b st de parité differente

Contraposition

si a et b m̂ parité $\Rightarrow a^2+b^2$ pair

* si a et b st pairs, s'écrire sous la forme $\begin{cases} a = 2l_1 \\ b = 2l_2 \end{cases}$ $(l_1, l_2 \in \mathbb{Z})$ ainsi

a^2+b^2 est pair

* a et b impairs $\Rightarrow \begin{cases} a = 2l_1+1 \\ b = 2l_2+1 \end{cases}$

$a^2+b^2 = (2l_1+1)^2 + (2l_2+1)^2$
$= 4l_1^2+4l_1+1+4l_2^2+4l_2+1$

b) $n = 4k+1$ où $k \in \mathbb{Z}$

n impair, $\exists a \in \mathbb{Z}$, $n = 2a+1$

Supposons n est la somme de 2 carrés

Alors $\exists x, y \in \mathbb{Z}$, $x^2+y^2 = n$

$x^2+y^2 = 2a+1$

$\overset{a/}{\Rightarrow}$ x et y st de parité $\neq$tes

$\begin{cases} x \text{ pair} \Rightarrow x = 2\alpha \\ y \text{ impair} \Rightarrow y = 2\beta+1 \end{cases}$

$n = x^2+y^2 = 4\alpha^2+4\beta^2+4\beta+1$
$= 4(\alpha^2+\beta^2+\beta)+1$
$= 4k+1$ avec $k = \alpha^2+\beta^2+\beta$.

c) Supposons que $4k-1$ est la somme de deux carré

$4k-1$

$4k-1 = 2(2k)-1$

$\begin{cases} 4k-1 \text{ impair} \\ 4k-1 \text{ somme de deux carrés} \end{cases}$

D'après la question precedente

$\exists l \in \mathbb{Z}$, $4k+1 = 4l-1$

$4(k-l) = 2$

$2(\underbrace{k-l}_{\in \mathbb{Z}}) = 1$ impossible

4)

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \cancel{\sum_{1\le i_1<\dots<}^{4}} \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1} \left[\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le 4} \cancel{\#} \left(A_{i_1}\cap\dots A_{i_k}\right)\right]$$

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 4} \#\left(A_{i_1} \cap \dots A_{i_k}\right) \right]$$

$$\Rightarrow (-1)^{1-1} \cdot \left[\sum_{1 \leq i_1 \leq 4} \#\left(A_{i_1}\right)\right] + (-1)^{2-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq 4} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right)\right] + (-1)^{3-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq 4} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} A_{i_3}\right)\right] +$$

$$+ (-1)^{4-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4 \leq 4} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}\right) \right]$$

$$= 1 \cdot \left(\#A_1 + \#A_2 + A_3 \#A_4\right) - 1 \cdot \left[\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_3 \cap A_4\right.$$

$$\left. + 1 \left[\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4)\right]\right] - \left[\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\right]$$